Conceptos previos

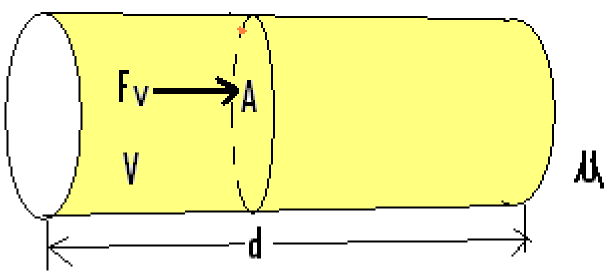
La **ley de Poiseuille** (también conocida como **ley de Hagen-Poiseuille** después de los experimentos llevados a cabo por **Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen** (**1797-1884**) en 1839) es la ley que permite determinar el flujo laminar estacionario Φ_V de un líquido incompresible y uniformemente viscoso (también denominado fluido newtoniano) a través de un tubo cilíndrico de sección circular constante. Esta ecuación fue derivada experimentalmente en 1838, formulada y publicada en 1840 y 1846 por Jean Louis Marie Poiseuille (1797-1869). La ley queda formulada del siguiente modo:

Para un fluido que escurre por un tubo que tiene una superficie trnasversal A , una viscosidad μ , una velocidad de flujo V y una distancia a recorrer d, se define la fuerza viscosa como :

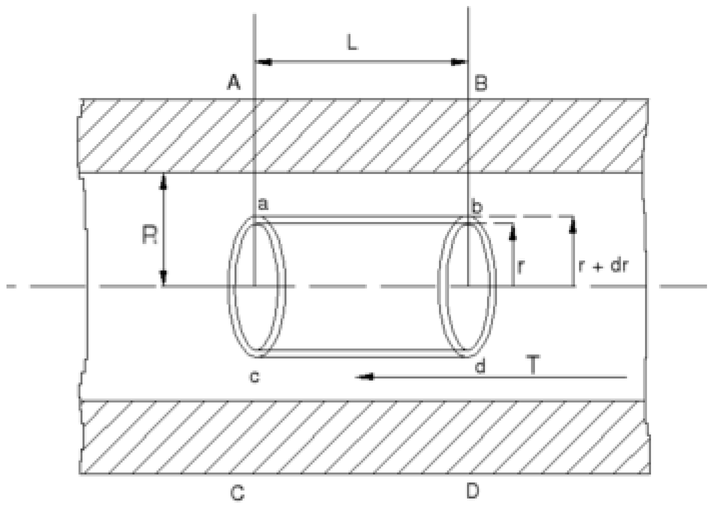
$$F_v = -\eta \frac{VA}{d}$$

Donde la viscosidad

se mide en $\eta = \frac{Dinas.s}{cm^2} = Poise$



Deducción



$$\Delta P + F = 0$$

$$P_1 \pi r^2 - P_2 \pi r^2 + F = 0$$

Como además:

$$\frac{F}{A_l} = \eta \frac{dv}{dr}$$

De donde: F=$2\pi r L\eta \frac{dv}{dr}$,

Sustituyendo:

$$P_1\pi r^2 - P_2\pi r^2 + 2\pi r L\eta \frac{dv}{dr} = 0$$

$$2\pi r L\eta \frac{dv}{dr} = -(P_1\pi r^2 - P_2\pi r^2)$$

$$2\pi r L\eta \frac{dv}{dr} = -\Delta P\pi r^2$$

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta P\pi r^2}{2\pi r L\eta}$$

$$dv = -\frac{\Delta P r}{2L\eta} dr$$

$$dv = -\frac{\Delta P}{2L\eta}\ r dr$$

$$\int dv = \int_r^R -\frac{\Delta P}{2L\eta}\ r dr$$

$$v = -\frac{\Delta P}{2L\eta}\int_r^R\ r dr$$

$$v = -\frac{\Delta P}{2L\eta}\left(\frac{r^2}{2}\right)\begin{matrix}R\\r\end{matrix}+\mathrm{C}$$

Si r=R , entonces la velocidad v del flujo es cero, esto es v=0, entonces:

$$0 = -\frac{\Delta P}{4L\eta} + C$$

De donde :

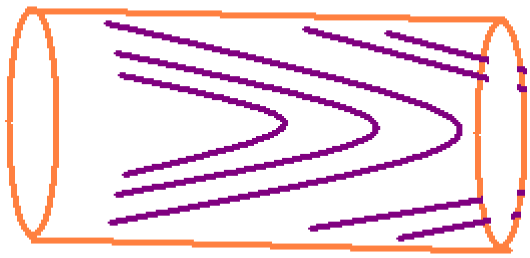
$$C = -\frac{\Delta P R^2}{4L\eta}$$

Por lo tanto:

$$v = -\frac{\Delta P r^2}{4L\eta} + \frac{\Delta P R^2}{4L\eta}$$

$$v = \frac{\Delta P}{4L\eta}(R^2 - r^2)$$

$$v = -\frac{\Delta P}{2L\eta}\left(\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right)$$

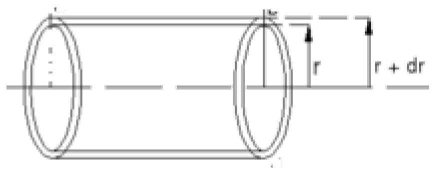


$v = -\frac{\Delta P}{4L\eta}(R^2 - r^2)$, ecuación de distribución de velocidades del fluido en una tubería, la expresión R^2 indica un paraboloide.

Por otro lado,La velocidad será máxima cuando r=0

$$v = -\frac{\Delta P}{4L\eta}R^2$$

Como además la velocidad media esta dada por:



$$v_m = \frac{Q}{A}$$

$$Q = v_m A$$

$$Q = v_m \pi r^2$$

dQ=$2\pi r v$dr

sustituyendo:

dQ=$2\pi r \times -\frac{\Delta P}{4L\eta}(R^2 - r^2)$dr

dQ=$-\frac{\Delta P}{2L\eta}(R^2 - r^2)\pi r$dr

dQ=$-\frac{\Delta P\pi}{2L\eta}(R^2 - r^2) r$dr

$$\int dQ = \int_0^R -\frac{\Delta P\pi}{2L\eta}(R^2 - r^2)r\mathrm{dr}$$

Q=$\int_0^R -\frac{\Delta P\pi}{2L\eta}R^2 r\mathrm{dr} - \int_0^R -\frac{\Delta P\pi}{2L\eta}r^2 r\mathrm{dr}$

Q=$-\frac{\Delta P\pi}{2L\eta}R^2\int_0^R r\mathrm{dr} + \frac{\Delta P\pi}{2L\eta}\int_0^R r^3 r\mathrm{dr}$

Q=$-\frac{\Delta P\pi}{2L\eta}R^2\left(\frac{r^2}{2}\right)\begin{matrix}R\\0\end{matrix} + \frac{\Delta P\pi}{2L\eta}\left(\frac{r^4}{4}\right)\begin{matrix}R\\0\end{matrix}$

Q=$-\frac{\Delta P\pi}{2L\eta}\left[R^2\left(\frac{r^2}{2}\right)\begin{matrix}R\\0\end{matrix} + \left(\frac{r^4}{4}\right)\begin{matrix}R\\0\end{matrix}\right]$

Q=$-\frac{\Delta P\pi}{2L\eta}\left[R^2\left(\frac{R^2}{2} - 0\right) + \left(\frac{R^4}{4} - o\right)\right]$

Q=$-\frac{\Delta P\pi}{2L\eta}\left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^2}{4}\right]$

Q=$-\frac{\Delta P\pi}{2L\eta}\frac{R^2}{4}$

Q=$-\frac{\Delta P\pi R^4}{8L\eta}$

Como además: $v = \frac{Q}{A}$

$$v = \frac{\Delta P\pi R^4}{8L\eta} \times \frac{1}{\pi R^2}$$

$$v = \frac{\Delta P\pi R^2}{8L\eta}$$

Si seguimos trabajando sobre esta fórmula y sustituimos esta expresión del caudal en la fórmula anterior de la velocidad media obtenemos lo siguiente:

Expresado en función del diámetro:

$$v = \frac{\Delta P\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2}{8L\eta}$$

$$v = \frac{\Delta P \pi D^2}{32 L \eta}$$

Como además :

$$v = \frac{v_{máx}}{2}$$

Despejando la pérdida de presión en las anteriores ecuaciones obtenemos:

$$\Delta P = \frac{32 \eta L v_{media}}{D^2}$$

que no deja de ser otra expresión de la ley de Poiseuille para la pérdida de presión en una tubería de sección constante con flujo laminar.

Si dividimos y multiplicamos el segundo miembro de la ecuación anterior por la expresión $2\rho v_{media} g$ tenemos que:

$$\Delta P = \frac{32 \eta L v_{media}}{D^2} \times \frac{2 \rho v_{media} g}{2 \rho v_{media} g}$$

$$\frac{\Delta P}{\rho g} = \frac{64 \eta}{\overline{v} D \rho} \times \frac{L \overline{v}^2 \rho g}{2 g D} / : \rho g$$

$$\frac{\Delta P}{\rho g} = \frac{64 \eta}{\overline{v} D \rho} \times \frac{L}{D} \times \frac{\overline{v}^2}{2g}$$

donde $\frac{\Delta p}{\rho g} = h_f$ es la pérdida de carga y $Re = \frac{v_{media} D \rho}{\eta}$ es la expresión del número de Reynolds, con lo que la pérdida de carga queda expresada del siguiente modo:

Hf=$\frac{64}{R_e} \frac{L \overline{v}^2}{2Dg}$

comparando esta última expresión con la ecuación de Darcy-Weisbach se deduce el valor de λ:

$\Lambda = \frac{64}{R_e}$

Curiosidad:

La ley en sí misma muestra cómo de interesante es este campo, dado que la ecuación de Darcy-Weisbach debería ser denominada completa y propiamente como ecuación de Chézy - Weisbach - Darcy - Poiseuille - Hagen - Reynolds - Fanning - Prandtl - Blasius - von Kármán - Nikuradse - Colebrook - White - Rouse - Moody o abreviadamente como CWDPHRFPBKNCWRM.

Nótese también como en la fórmula el flujo depende fuertemente del radio. Si el resto de factores permanece constante, el doblar el radio del canal da como resultado un incremento en 16 veces del flujo.